Appunti del corso di Geometria del prof. Landi

(tratti dal programma svolto)

Anno Accademico 2009/2010

A cura di Piccoli Tobia

PARTE TEORICA

DEFINIZIONI

a) Spazio vettoriale

Sia K un campo e V un insieme non vuoto. V si dice spazio vettoriale su K o K-spazio vettoriale se:

1) in V è definita un'operazione di somma $s : V \times V \to V$ denotata con $s(v, v') = v + v'$ e, rispetto a s, V è un gruppo abeliano

2) è definita un'operazione di prodotto esterno $p : K \times V \to V$ denotata con $p(k, v) = kv,\ k \in K,\ v \in V$

3) sono verificate le seguenti proprietà:

1) $(V, +)$ è un gruppo commutativo

2) $\forall\, k,\, k' \in K,\ \forall\, v, v' \in V$ si ha:

$(k + k')v = kv + k'v$

$k(v + v') = kv + kv'$

$k(k'v) = (kk')v$

$1v = v$ con $1 = 1_K$

b) Sottospazio vettoriale

Sia V un K-spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto esterno, e $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme. W è un sottospazio vettoriale di V se rispetto alle operazioni di somma e prodotto esterno W ha una struttura di K-spazio vettoriale.

c) Base e dimensione di uno spazio vettoriale

Sia V un K-spazio vettoriale. Un insieme ordinato $B = \{v_1, ..., v_n\}$ di vettori di V si dice base di V se B è un sistema libero di generatori di V, cioè se $V = \mathcal{L}\{v_1, ..., v_n\}$ e $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti.
Se esiste un intero positivo n tale che il K-spazio vettoriale ammetta una base di n elementi diremo che V ha dimensione n e scriveremo $dim_K(V) = n$ o $dim(V) = n$ qualora il campo K sia chiaro dal contesto.

d) Rango di una matrice

Sia una matrice $A \in K^{m,n}$. Si dice rango di A e si indica $\rho(A)$ il massimo numero di colonne (o di righe) linearmente indipendenti della matrice. Si ha sempre che $\rho(A) \in \mathbb{N}$ e $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$.

e) Matrice ridotta per righe

Una matrice $A \in K^{m,n}$ si dice ridotta (o riducibile) per righe se:

1) eliminate le righe nulle e

2) permutate opportunamente le colonne,

si ottiene una matrice di tipo Triangolare Superiore Completa (matrice stella).

f) Soluzione e spazio delle soluzioni di un sistema lineare

Una soluzione di un sistema lineare Σ è una n-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ di K^n che è soluzione di ogni equazione del sistema. L'insieme di tutte le soluzioni del sistema Σ prende il nome di spazio delle soluzioni, è un sottoinsieme di K^n, e si indica con $S(\Sigma)$.

g) Applicazione lineare

Siano V e W due K-spazi vettoriali. Un'applicazione $f : V \to W$ si dice lineare se gode delle seguenti 2 proprietà:

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2),\ \forall\, v_1, v_2 \in V$

2) $f(av) = af(v)\ \forall\, v \in V, \forall a \in K$

Ove con v si intende il vettore colonna ${}^t(x_1, ..., x_n)$

h) Nucleo e immagine di un'applicazione lineare

Data un'applicazione lineare $f : V \to W$, si dice nucleo di f, e si denota con $ker(f)$, il sottoinsieme di V definito da:

$ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$ ossia l'insieme dei vettori mandati da f in 0_W.

Si dice immagine di f, e si denota con $Im(f)$, il sottoinsieme di W definito da:

$Im(f) = \{w \in W : \exists\, v \in V : w = f(v)\}$

i) Matrice di cambiamento base

Sia V un K-spazio vettoriale e siano B e C due basi di V. La matrice del cambiamento di base da B a C è la matrice M^{BC} associata alla funzione identità da V in sè rispetto alle basi B (in partenza) e C (in arrivo).

j) Somma diretta di sottospazi vettoriali

Siano $W_1, ..., W_n$ sottospazi di un K-spazio vettoriale V. La somma:

$W = W_1 + ... + W_n$

si dice diretta se ogni suo elemento v si scrive in modo unico nella forma:

$v = w_1 + ... + w_n$ con $w_i \in W_i$, $i = 1, ..., n$

e in tal caso si scrive $W = W_1 \oplus, ..., \oplus W_n$.

k) Matrici simili

Due matrici A, $B \in K^{n,n}$ si dicono simili se sono associate ad uno stesso endomorfismo di K^n e si indica ciò con: $A \sim B$

l) Endomorfismi semplici

Un endomorfismo $\phi \in End(V)$ si dice semplice se verifica una delle seguenti condizioni (dati V, un K-spazio vettoriale, e $\phi \in End(V)$) :

1) esiste una base B di V tale che M_ϕ^{BB} è diagonalizzabile

2) per ogni base D di V la matrice M_ϕ^{DD}è diagonalizzabile

3) esiste una base C di V tale che M_ϕ^{CC} è diagonale

1), 2), 3) sono equivalenti

m) Autovettori e autovalori

Sia V un K-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$; se $v \in V$ è un vettore non nullo e se esiste $\lambda \in K$ tale che $\phi(v) = \lambda v$ allora λ si dice autovalore di ϕ e v si dice autovettore di ϕ associato a λ.

n) Autospazi

Sia V un K-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$; se λ è un autovalore di ϕ allora l'insieme:

$V_\lambda = \{v \in V : \phi(v) = \lambda v\}$

è un sottospazio vettoriale di V e viene detto autospazio associato all'autovalore di λ.

o) Polinomio caratteristico di una matrice

Sia $A \in K^{n,n}$ una matrice quadrata; allora l'espressione $det(A - TI_n)$ è un polinomio $p_A(T)$ di grado n in T a coefficienti in K che viene chiamato polinomio caratteristico della matrice A.

p) Prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$

L'applicazione $\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da:

$(x_1, ..., x_n) \bullet (y_1, ..., y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$

si dice prodotto scalare canonico (euclideo) e $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ si chiama spazio euclideo E^n(è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale). Posti $v = (x_1, ..., x_n)$, $w = (y_1, ..., y_n)$ le proprietà del prodotto euclideo sono:

1) $v \bullet w = (x_1, ..., x_n) \bullet (y_1, ..., y_n) = (y_1, ..., y_n) \bullet (x_1, ..., x_n) = w \bullet v = x_1y_1 + ... + x_ny_n$

2) $v \bullet (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1(v \bullet w_1) + \lambda_2(v \bullet w_2) \ \forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

3) $v \bullet v = (x_1, ..., x_n) \bullet (x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2 \geq 0$

4) $v \bullet v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

q) Base ortonormale

Sia $(v_1, ..., v_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$. Se:

$$v_i \cdot v_j = \begin{matrix} 1 \, se \, i = j \\ 0 \, se \, i \neq j \end{matrix}$$

la base è detta ortonormale

r) Sottospazio ortogonale di un sottospazio di E^n

Sia $(E^n, \bullet)$ uno spazio euclideo e sia $W \subseteq E^n$ un sottospazio vettoriale. Si dice ortogonale di W l'insieme:

$W^{\perp} = \{v \in E^n : v \bullet w = 0,\ w \in W\}$

s) Giacitura di una retta e di un piano

Data una retta r in $A^2(\mathbb{R})$ o $A^3(\mathbb{R})$ si dice giacitura di r e si indica con S_r la corrispondente retta passante per l'origine.

Dato un piano $\pi \subset A^3(\mathbb{R})$ si dice giacitura di π e si indica con $S_\pi$il corrispondente piano passante per l'origine.

t) Rette parallele in A^n

In $A^n(\mathbb{R})$ due rette r, r'si dicono parallele se e solo se hanno la stessa giacitura:

$r \parallel r' \Leftrightarrow S_r = S_{r'}$

u) Piani paralleli in A^n

In $A^n(\mathbb{R})$ due piani π, π'sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura:

$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow S_\pi = S_{\pi'}$

v) Retta e piano paralleli in A^3

In $A^3(\mathbb{R})$ una retta r e un piano π sono paralleli se la giacitura della retta è contenuta nella giacitura del piano:

$r \parallel \pi \Leftrightarrow S_r \subset S_\pi$

w) Rette ortogonali

Due rette r, r'sono ortogonali (in qualunque dimensione) se le loro giaciture sono ortogonali, ovvero:

$S_r \cdot S_{r'} = 0 \Leftrightarrow v \cdot w = 0,\ v \in S_r,\ w \in S_{r'}$

x) Piani ortogonali

In E^3 il piano π è ortogonale al piano π' se un qualunque vettore ortogonale a π ed un qualunque vettore ortogonale a π' sono fra loro ortogonali.

y) Matrice ortogonale

Una matrice P si dice ortogonale se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

z) Endomorfismo autoaggiunto

Un endomorfismo $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ si dice autoaggiunto se:

$\phi(v) \cdot w = \phi(w) \cdot v \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

ENUNCIATI

1) Criterio di sottospazio vettoriale

Sia V un K-spazio vettoriale e W un suo sottoinsieme non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) W è un sottospazio vettoriale di V

2) W è chiuso rispetto alla somma s ed al prodotto esterno p

3) $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W \; \forall\, w_1, w_2 \in W \; \forall\, \lambda, \mu \in K$

2) Metodo per il calcolo del nucleo di un'applicazione lineare

Siano V e W due K-spazi vettoriali di basi B e C rispettivamente e $f : V \to W$ un'applicazione lineare con $A = M_f^{BC}$. Per determinare $ker(f)$ si procede così:

1) si risolve il sistema omogeneo $\Sigma :\; AX = 0$ e si determina una base $((a_1^1, ..., a_n^1),\, ...,\, (a_1^p, ..., a_n^p))$ per lo spazio delle soluzioni S_Σ.

2) ne segue che $ker(f) = \mathcal{L}((a_1^1, ..., a_n^1)_B,\, ...,\, (a_1^p, ..., a_n^p)_B)$. In particolare se $V = K^n$ e B è la base canonica allora $ker(f)$ coincide con S_Σ.

3) Metodo per il calcolo dell'immagine di un'applicazione lineare

Siano V e W due K-spazi vettoriali di basi B e C rispettivamente e $f : V \to W$ un'applicazione lineare con $A = M_f^{BC}$. Per determinare l'immagine di f che si denota con $Im(f)$ si procede come segue:

1) si riduce A per colonne ottenendo una base per lo spazio delle colonne $C(A)$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ . \\ . \\ . \\ b_{1m} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} b_{p1} \\ . \\ . \\ . \\ b_{pm} \end{pmatrix}$$

2) allora $Im(f) = \mathcal{L}((b_{11},\, ...,\, b_{1m})_C,\, ...\, ,(b_{p1},\, ...,\, b_{pm})_C)$. In particolare se $W = K^n$e C è la base canonica, allora $Im(f)$ coincide con $C(A)$.

4) Metodo degli scarti successivi

Sia $I = \{v_1,\, ...,\, v_n\}$ un insieme di generatori di un K-spazio vettoriale V. Si costruisce una catena di sottoinsiemi di I:

1) $I_1 = I \setminus \{v_i \in I \mid v_i = 0_V\}$; insieme dei vettori non nulli di I, ad esempio $I_1 = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_k\}$

2) $v_2 \in \mathcal{L}(v_1)?$ $\begin{array}{l} \textit{se sì } \to I_2 = I_1 \setminus \{v_2\} \\ \textit{se no } \to I_2 = I_1 \end{array}$; quindi $I_2 \subseteq I_1$

3) $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)?$ $\begin{array}{l} \textit{se sì } \to I_3 = I_2 \setminus \{v_3\} \\ \textit{se no } \to I_3 = I_2 \end{array}$; quindi $I_3 \subseteq I_2$

...

k) $v_k \in \mathcal{L}(v_1, v_2, ...v_{k-1})?$ $\begin{array}{l} \textit{se sì } \to I_k = I_{k-1} \setminus \{v_k\} \\ \textit{se no } \to I_k = I_{k-1} \end{array}$; quindi $I_k \subseteq I_{k-1}$

Si è quindi costruita una catena di sottoinsiemi $I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_k$ tali che $\mathcal{L}(I) = \mathcal{L}(I_1) = ... = \mathcal{L}(I_k)$, quindi I_k è un insieme libero (i suoi vettori sono linearmente indipendenti) di generatori di V ed I_k è una base di $\mathcal{L}(I) \subseteq V$

5) Criterio di iniettività di un'applicazione lineare

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è iniettiva

2) $ker(f) = \{0_V\}$

3) $dim(V) = \rho(A)$ per ogni matrice A associata ad f

6) Criterio di suriettività di un'applicazione lineare

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è suriettiva

2) $dim(W) = \rho(A)$ per ogni matrice A associata ad f

7) Criterio di isomorfismo di un'applicazione lineare

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra K-spazi vettoriali della stessa dimensione. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è iniettiva

2) f è suriettiva

3) f è un isomorfismo

8) Metodo di risoluzione dei sistemi lineari

Dato il sistema lineare $AX = B$ lo si risolve in 2 passi:

1) si riduce per righe la matrice (A, B) ottenendo una matrice (A', B') con A' ridotta per righe; i due sistemi $AX = B$ e $A'X = B'$ sono equivalenti.

2) si determina lo spazio delle soluzioni di $A'X = B'$ (usando il metodo di risoluzione dei sistemi ridotti) che coincide con lo spazio delle soluzioni $AX = B$.

9) Teorema di Rouché - Capelli

Dato il sistema lineare in n incognite $\Sigma : AX = B$ si ha:

1) Σ ha soluzioni $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(AB)$

2) se ciò accade ci sono $n - \rho$ variabili libere (o anche il sistema ammette $\infty^{n-\rho}$ soluzioni).

3) come incognite libere si può scegliere un particolare sottoinsieme di $n - \rho$ variabili $\Leftrightarrow$ le rimanenti variabili corrispondono a colonne linearmente indipendenti.

10) Teorema su matrici associate ad un'applicazione lineare e cambi di base (con diagramma)

Siano V e W due K-spazi vettoriali, B e B' due basi di V, C e C' due basi di W. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, allora $M_f^{B'C'} = M^{CC'} M_f^{BC} M^{B'B}$. Ciò si può riassumere con un diagramma commutativo (cioè il percorso fatto in verso equivale a quello fatto nell'altro):

$$\begin{tikzcd} V_B \arrow[r, "f"] & W_C \arrow[d, "id_W"] \\ V_{B'} \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"'] & W_{C'} \end{tikzcd}$$

11) Sviluppo del determinante secondo Laplace

Sia $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ e sia $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ (complemento algebrico di a_{ij}); allora $detA = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \ ... \ + a_{1n}\alpha_{1n}$ (per la riga 1). In generale si ha $detA = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + ... + a_{in}\alpha_{in}$ per la riga i-esima. Per la colonna j-esima si ha invece l'espressione generale: $detA = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \ ... \ + a_{ij}\alpha_{ij}$.

12) Relazione tra molteplicità algebrica e geometrica di un autovettore

Sia V un K-spazio vettoriale e sia $\phi \in End(V)$. Siano λ un autovalore di ϕ di molteplicità $m(\lambda)$ e V_λ il relativo autospazio; allora $1 \leq dim(V_\lambda) \leq m(\lambda)$, dove $dim(V_\lambda)$ è detta molteplicità geometrica, che è sempre minore o uguale alla molteplicità algebrica $m(\lambda)$.

13) Metodo per determinare se una matrice è diagonalizzabile

Sia $A \in K^{n,n}$ e sia $\phi = K^n \to K^n$ l'endomorfismo associato ad A rispetto alla base canonica. La matrice A è diagonalizzabile se e solo se ϕ è semplice. Si procede nel seguente modo:

1) si calcola il polinomio caratteristico $P_\phi(\lambda) = P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ di ϕ e si trovano le sue radici ossia gli autovalori λ_1, ..., λ_s ;

2) se $\exists\, j \mid \lambda_j \notin K$ si può subito dire che A non è diagonalizzabile

3) se $\lambda_j \in K$ allora:

   1) se $m(\lambda_j) \neq dim(V_{\lambda j})$ allora A non è diagonalizzabile

   2) se $m(\lambda_j) = dim(V_{\lambda j})$ allora A è diagonalizzabile

4) se A è diagonalizzabile è simile ad una matrice diagonale lungo la cui diagonale ci sono λ_1, ..., λ_s ripetuti secondo la loro molteplicità. Inoltre $\triangle = P^{-1}AP$ con $P = M^{B\varepsilon}$ la matrice del cambio base B di autovettori alla base canonica ε.

14) Teorema di caratterizzazione degli endomorfismi semplici

Sia V un K-spazio vettoriale e $\phi \in End(V)$. Se λ_1, ..., λ_s sono le radici di $P_\phi(\lambda)$ di molteplicità $m(\lambda_1)$, ..., $m(\lambda_s)$, rispettivamente sono equivalenti:

1) ϕ è semplice

2) esiste una base B di V fatta da autovettori

3) V è somma diretta degli autospazi: $V = V_{\lambda 1} \oplus ... \oplus V_{\lambda s}$

4) $\lambda_j \in K$ e $m(\lambda_j) = dim(V_{\lambda j})\ \forall\, j = 1, ..., s$

15) Equazione della retta per due punti di E^n

Dati 2 punti distinti A e B in $A^n(\mathbb{R})$ esiste una ed una sola retta passante per A e B ed una sua possibile equazione vettoriale è data da:

$r:\ P = A + \lambda(B - A)$.

16) Equazione del piano per tre punti di E^n

Dati 3 punti A, B, C in $A^3(\mathbb{R})$ distinti e non allineati esiste ed è unico il piano che li contiene ed una sua possibile equazione vettoriale è data da:

$\pi:\ P = A + \lambda(B - A) + \mu(C - A)$.

17) Metodo di ortonormalizzazione di Gram - Schimdt

Sia $B = (v_1, ..., , v_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$. Posti:

$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$e_2 = \frac{v_2-(v_2\cdot e_1)e_1}{\|v_2-(v_2\cdot e_1)e_1\|}$

$e_3 = \frac{v_3-[(v_3\cdot e_1)e_1+(v_3\cdot e_2)e_2]}{\|v_3-[(v_3\cdot e_1)e_1+(v_3\cdot e_2)e_2]\|}$

.

.

.

$e_n = \frac{v_n-\sum_{j=1}^{n-1}(v_n\cdot e_i)e_i}{\left\|v_n-\sum_{j=1}^{n-1}(v_n\cdot e_i)e_i\right\|}$

si ha che e_1, ..., e_n costituiscono una base ortonormale.

18) Equazione normale della retta in E^2

Data un retta r di E^2 di equazione vettoriale $P = A + \lambda v$ e u un vettore ortogonale a r, cioè $S_r^{\perp} = \mathcal{L}(u)$ si dice equazione normale della retta r la:

$(P - A) \cdot u = 0$

e si ha che $P \in r \Leftrightarrow (P - A) \cdot u = 0$

19) Formula della distanza punto piano in E^3

Sia $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ un punto di E^3 e sia $\pi:\ ax + by + cz + d = 0$ un piano di E^3. Allora la distanza tra il punto ed il piano è data dalla formula:

$d(A, \pi):\ \frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma|}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$

20) Distanza tra retta e piano paralleli in E^3

Siano r e π una retta ed un piano paralleli in E^3. Allora:

$d(r, \pi) = d(P, \pi)$

dove P è un punto qualunque di r.

21) Caratterizzazione delle matrici ortogonali

Una matrice $A \in R^{n,n}$ si dice ortogonale se e solo se ${}^tAA = I_n$, cioè se ${}^tA = A^{-1}$. Se A è ortogonale allora $det(A) = \pm 1$.

22) Caratterizzazione degli endomorfismi autoaggiunti in termini di autospazi

Sia $\phi \in End(V)$ un endomorfismo semplice e siano $V_{\lambda 1}$, ..., $V_{\lambda s}$ i suoi autospazi. Allora ϕ è autoaggiunto se e solo se i suoi autospazi sono a due a due ortogonali, cioè $V_{\lambda i} \perp V_{\lambda j}$ $\forall i \neq j$.

DIMOSTRAZIONI

A) Sia V un K-spazio vettoriale e $W \subseteq V$. Allora W è un sottospazio vettoriale di V se e solo se W è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalare.

Innanzitutto W è chiuso rispetto a somma e prodotto per ipotesi. Poichè le proprietà associativa e commutativa valgono in V allora valgono anche in W. Basta mostrare che W ha elemento neutro (zero) e opposto di ogni suo elemento. Se $0_V \in W$ allora 0_V è zero di W, infatti $\forall w \in W$ si ha:

$0_V + w = w + 0_V = w$

poichè $w \in V$. Dall'ipotesi di chiusura del prodotto si ha che $0_K \cdot w \in W$ $\forall w \in W$, ma contemporaneamente si ha che $0_K \cdot w = 0_V$, quindi $0_V \in W$. Infine se $w \in W$ allora

$-w = (-1)w \in W$.

B) Siano W_1e W_2 due sottospazi di un K-spazio vettoriale V e sia $W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2\,;\ w_1 \in W_1,\, w_2 \in W_2\}$. Allora $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $W_1 \cup W_2$.

1) presi $\lambda, \lambda' \in K$ $v, v' \in W_1 + W_2$, si definiscono:

$v = w_1 + w_2$

$v' = w_1^{'} + w_2^{'}$

dove $w_1, w_1^{'} \in W_1$ $w_2, w_2^{'} \in W_2$. Si ha:

$\lambda v + \lambda' v' = \lambda\left(w_1 + w_2\right) + \lambda'\left(w_1^{'} + w_2^{'}\right) = \left(\lambda w_1 + \lambda^{'} w_1^{'}\right) + \left(\lambda w_2 + \lambda^{'} w_2^{'}\right)$

e visto che W_1 e W_2 sono sottospazi si ha che $\lambda w_1 + \lambda' w_1^{'} \in W_1$ e $\lambda w_2 + \lambda w_2^{'} \in W_2$ da cui segue che $W_1 + W_2$ è un S.S.V. di V.

2) si dimostra poi che $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Infatti se:

$w_1 \in W_1 \Rightarrow w_1 = w_1 + 0_V \in W_1 + W_2$

$w_2 \in W_2 \Rightarrow w_2 = w_2 + 0_V \in W_1 + W_2$

3) per provare che è il più piccolo sottospazio si prova che è contenuto in un qualunque sottospazio Z che contenga $W_1 \cup W_2$. Allora $\forall\, w_1 \in W_1,\, w_2 \in W_2$ si ha $w_1 + w_2 \in Z$ quindi $Z \supseteq W_1 + W_2$.

C) Sia V un K-spazio vettoriale e $v_1, ..., v_n \in V$, allora $\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ è un S.S.V. di V.

Basta dimostrare che $\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ è chiuso rispetto somma e prodotto per scalare:

1) per somma: siano v, v' due elementi di $\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$. Allora esistono scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n$ e $\mu_1, ..., \mu_n$ tali che $v = \lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n$ e $v' = \mu_1 v_1, ..., \mu_n v_n$. Quindi la loro somma è:

$v + v' = (\lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1, ..., \mu_n v_n) = (\lambda_1 + \mu_1)\, v_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\, v_2 + ... + (\lambda_n + \mu_n)\, v_n$

quindi $v + v' \in \mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$.

2) per prodotto: siano $\lambda \in K$ e $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in \mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$. Allora:

$\lambda v = \lambda\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = (\lambda\lambda_1)v_1 + ... + (\lambda\lambda_n)v_n$

quindi $\lambda v \in \mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$.

D) L'insieme $K[x]$ con le sue usuali operazioni tra polinomi è un K-spazio vettoriale di dimensione infinita.

Siano i polinomi $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + 0x^{n+1} + ... + 0x^m$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + ... + b_m x^m$ e uno scalare $\lambda \in K$; date le operazioni:

1) $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n + ... + b_m x^m$

2) $\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + ... + \lambda a_n x^n$

rispetto a tali operazioni $K(x)$ è un K-spazio vettoriale, infatti l'opposto di $p(x)$ è il polinomio $-p(x) = -a_0 - a_1 x - ... - a_n x^n$, l'elemento neutro è il polinomio nullo $p(x) = 0$ e così via.

E) Un insieme di vettori $I = \{v_1, ..., v_n\}$ è libero se e solo se ogni elemento di $\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei v_i.

Si assume che I sia libero e che esista un vettore $v \in \mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ che si scrive con 2 diverse combinazioni lineari, ovvero esistono scalari $\lambda_1, ..., \lambda_n$ e $\mu_1, ..., \mu_n$ tali che $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$. Allora:

$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0_V$

perchè $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti. Quindi i coefficienti si annullano:

$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = ... = \lambda_n - \mu_n = 0$

cioè $\lambda_i = \mu_i \; \forall i = 1, ..., n$

quindi non esiste alcun elemento di $\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ che si scrive in 2 modi distinti, ossia ogni vettore si scrive in maniera unica. Viceversa si assuma che ogni $v \in \mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ si scriva in modo unico come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$. In particolare 0_V si scrive in maniera unica:

$0_K v_1 + ... + 0_K v_n = 0_V$

Si prenda ora una generica combinazione lineare $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0_V$; per l'unicità della scrittura di 0_V deve essere $\lambda_i = 0 \; \forall i = 1, ..., n$. Dunque $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti

F) Data un'applicazione lineare $f : V \to W$, allora $f(0_V) = 0_W$ e $f(-v) = -f(v)$ per ogni $v \in V$.

Si ricorda una proprietà importante delle applicazioni lineari:

$f(ax) = af(x)$

Da questa si ha che:

1) $f(0_V) = f(0_K v) = 0_K f(v) = 0_W$

2) $f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1)f(v) = -f(v)$

G) Data un'applicazione lineare $f : V \to W$, $ker(f)$ e $Im(f)$ sono S.S.V. di V .

1) siano $v, v' \in ker(f)$ e $\lambda, \lambda' \in K$. Si vuole provare che $\lambda v + \lambda' v' \in ker(f)$, cioè che $f(\lambda v + \lambda' v') \in 0_W$. Per ipotesi $f(v) = 0_W = f(v')$, allora per le proprietà delle applicazioni lineari:

$f(\lambda v + \lambda' v') = \lambda f(v) + \lambda' f(v') = 0_W$

quindi $ker(f)$ è un S.S.V. di V.

2) si dimostra che è chiuso rispetto a somma e prodotto per scalare. Siano $w, w' \in Im(f)$ ovvero esistono $v, v' \in V$ tali che $f(v) = w$ e $f(v') = w'$; allora per le proprietà delle applicazioni lineari:

$\lambda w + \lambda' w' = \lambda f(v) + \lambda' f(v') = f(\lambda v) + f(\lambda' v') = f(\lambda v + \lambda' v') \Rightarrow \lambda w + \lambda' w' \in Im(f)$

H) Siano V e W due K-spazi vettoriali della stessa dimensione. Allora V e W sono isomorfi.

Si costruisce un semplice isomorfismo: siano $B = (b_1, ..., b_n)$ e $C = (c_1, ..., c_n)$ basi di V e W rispettivamente. Si costruisce una funzione f definita come: $f(v_i) = w_i \; \forall i = 1, ..., n$, estesa per linearità: se $v = (\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n) \in V$ allora $f(v) = \lambda_1 f(b_1) + ... + \lambda_n f(b_n) = \lambda_1 c_1 + ... + \lambda_n c_n$. Poiché $M_f^{B,C} = I_n$ e $\rho(I_n) = n$ allora f è un isomorfismo.

I) Dato un sistema lineare omogeneo in n incognite, il suo spazio delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Si usa il criterio di S.S.V. :

1) siano X_1, X_2 due soluzioni di Σ, cioè $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$. Allora:

$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0$

ossia anche la somma di soluzioni è una soluzione, cioè $X_1 + X_2 \in S(\Sigma)$

2) siano X una soluzione del sistema e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora:

$A(\lambda X) = 0 = \lambda AX = 0$

che è ancora una soluzione, ossia $\lambda X \in S(\Sigma)$.

Quindi $S(\Sigma)$ è un S.S.V. di $\mathbb{R}^n$.

L) Due matrici $A, B \in K^{n,n}$ sono simili se e solo se esiste $P \in GL(n)$ tale che $P^{-1}AP = B$

Sia $A \sim B$, allora esistono un endomorfismo $\phi : K^n \to K^n$ e due basi B e C di K^n tali che $A = M_\phi^{BB}$ e $B = M_\phi^{CC}$. Pertanto:

$B = M^{BC} A M^{CB}$

dove M^{CB} è invertibile e $(M^{CB})^{-1} = M^{BC}$, quindi $P = M^{CB}$. Viceversa sia P una matrice invertibile tale che $B = P^{-1}AP$; le colonne di P sono una base C di K^n, allora $P = M^{C\varepsilon}$ quindi $P^{-1} = M^{\varepsilon C}$. Sia $\phi = f_A^{\varepsilon\varepsilon}$ l'endomorfismo di K^n associato alla matrice A rispetto alla base canonica, da cui $A = M_\phi^{\varepsilon\varepsilon}$. Pertanto:

$B = P^{-1}AP = M^{\varepsilon C} M_\phi^{\varepsilon\varepsilon} M^{C\varepsilon} = M_\phi^{CC}$

Si conclude che anche B è associata allo stesso endomorfismo ϕ e A e B sono simili.

M) Se $\phi \in End(V)$ e λ è un suo autovalore, allora V_λ (insieme dei relativi autovettori) è un S.S.V. di V .

Si ricorda la definizione di autospazio: $V_\lambda = \{v \in V : \phi(v) = \lambda v\}$. Siano $v_1, v_2 \in V_\lambda$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Si vuole dimostrare che $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \in V_\lambda$:

$\phi(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 \phi(v_1) + \mu_2 \phi(v_2) = \mu_1 \lambda v_1 + \mu_2 \lambda v_2 = \lambda(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)$

N) In uno spazio vettoriale euclideo un insieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali è un insieme libero.

Si consideri una combinazione lineare nulla dei vettori v_1, ..., $v_n \in V \setminus \{0_V\}$: $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s = 0_V$. Allora:

$0 = v_i(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s) = \lambda_1(v_i \cdot v_1) + ... + \lambda_s(v_i \cdot v_s) = \lambda_i \|v_i\|^2$

e poichè $v_i \neq 0_V$ allora $\lambda_i = 0$. Ripetendo il procedimento per ogni i deve essere $\lambda_1 = ... = \lambda_s = 0$.

O) Se W è un sottospazio di uno spazio vettoriale euclideo V , allora $W^\perp$ è un sottospazio di V .

Siano $v_1, v_2 \in W^\perp$ cioè $v_1 \cdot w = 0$, $v_2 \cdot w = 0$ $\forall w \in W$. Dunque per qualsiasi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ si ha:

$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \cdot w = \lambda_1 v_1 w + \lambda_2 v_2 w = \lambda_1(v_1 w) + \lambda_2(v_2 w) = 0$, $\forall w \in W$, pertanto $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W^\perp$.

P) Dati due punti esiste ed è unica la retta passante per i due punti stessi.

Dati due punti A e B in $A^2(\mathbb{R})$ o $A^3(\mathbb{R})$ si ha che l'equazione vettoriale della retta è:

$r : P = A + \lambda(B - A)$

r passa per A quando $\lambda = 0$ e per B quando $\lambda = 1$. Una retta passante per A ha equazione vettoriale $P = A + \mu v$ con $v \in \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Inoltre r passa per B se e solo se vale $B = A + \mu_0 v$ per un opportuno μ_0 quindi se e solo se $B - A = \mu_0 v$. Allora:

$P = A + \frac{\mu}{\mu_0}(B - A) = A + \lambda(B - A)$

Dunque $\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(B - A)$.

Q) Formula della distanza punto - retta (nel piano)

Siano una retta $r: ax + by + c = 0$ di E^2 e $A = (\alpha, \beta)$ un punto di E^2. Allora l'equazione della distanza della retta dal punto è:

$d(A, r) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

Sia $\hat{u} = \pm\frac{(a,b)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ il versore ortogonale. Allora:

$d(A, r) = \frac{|(\alpha - x, \beta - y)\cdot(a,b)|}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \cdot |a\alpha + b\beta - xa - yb| = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

ponendo nell'ultimo passaggio $-xa - yb = c$.

R) Intersezione di due rette nello spazio (casi possibili).

Siano due rette r ed r' di equazioni:

$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

$r': \begin{cases} a_1^{'}x + b_1^{'}y + c_1^{'}z + d_1^{'} = 0 \\ a_2^{'}x + b_2^{'}y + c_2^{'}z + d_2^{'} = 0 \end{cases}$

L'intersezione $r \cap r'$ è data dalle soluzioni del sistema a cui sono associate le matrici A e (A, B):

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1^{'} & b_1^{'} & c_1^{'} \\ a_2^{'} & b_2^{'} & c_2^{'} \end{pmatrix} (A, B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_1^{'} & b_1^{'} & c_1^{'} & -d_1^{'} \\ a_2^{'} & b_2^{'} & c_2^{'} & -d_2^{'} \end{pmatrix}$

sono possibili 4 casi:

1) $\rho(A) = \rho(A, B) = 2:$ il sistema ha ∞' soluzioni, quindi $r = r'$

2) $\rho(A) = \rho(A, B) = 3:$ il sistema ha una sola soluzione, e quindi l'intersezione è il punto P

3) $\rho(A) = 2$; $\rho(A, B) = 3:$ non ci sono soluzioni, le due rette sono parallele: $r \parallel r'$

4) $\rho(A) = 3$; $\rho(A, B) = 4:$ non ci sono soluzioni le due rette sono sghembe

S) Intersezione di due piani nello spazio (casi possibili)

Siano π e π' due piani di equazioni cartesiane:

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

$\pi': a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0$

La loro intersezione $\pi \cap \pi'$ è data dalle soluzioni del sistema a cui sono associate le matrici A e (A, B):

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^{'} & b^{'} & c^{'} \end{pmatrix} (A, B) = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a^{'} & b^{'} & c^{'} & -d^{'} \end{pmatrix}$

sono possibili 3 casi:

1) $\rho(A) = \rho(A,B) = 1$: il sistema ha ∞^2 soluzioni, quindi $\pi = \pi'$

2) $\rho(A) = \rho(A,B) = 2$: il sistema ha ∞' soluzioni, l'intersezione dei due piani è una retta

3) $\rho(A) = 1$ $\rho(A,B) = 2$: il sistema non ha soluzioni, l'intersezione è l'insieme vuoto e quindi $\pi \parallel \pi'$

T) Sia V un K-spazio vettoriale e $\phi \in End(V)$; se $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ sono autovalori distinti e $0_V \neq v_i \in V_{\lambda i}$, $i = 1, 2$ allora v_1e v_2 sono linearmente indipendenti.

Si ha $v_1 \neq 0$ per ipotesi, e si suppone che v_i non è combinazione lineare di v_1, ..., v_{i-1} per ogni $i \geq 2$. Sia, per assurdo, i_0 il primo indice per il quale la proprietà non vale. Dunque $\{v_1, ..., v_{i_0-1}\}$ è libero, e v_{i_0} è combinazione lineare dei precedenti, cioè: $v_{i_0} = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i_0-1} v_{i_0-1} \quad (*)$

Applicando ϕ ad entrambi i membri, e tenendo conto che i v_i sono autovettori di autovalore λ_i, si ha:

$\phi(v_{i_0}) = \lambda_{i_0} v_{i_0} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_{i_0-1} \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1}$

Dalla $(*)$ segue che:

$\lambda_{i_0}(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i_0-1} v_{i_0-1}) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_{i_0-1} \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1}$

e quindi:

$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{i_0}) v_1 + ... + \alpha_{i_0-1}(\lambda_{i_0-1} - \lambda_{i_0}) v_{i_0-1} = 0_V$

Poiché $\{v_1, ..., v_{i_0-1}\}$ è libero i coefficienti di tale combinazione lineare sono nulli, e visto che gli autovalori sono distinti per ipotesi si ha $\alpha_1 = ... = \alpha_{i_0-1} = 0$ e quindi $v_{i_0} = 0_V$ contro l'ipotesi.

U) In E^3 (cioè $\mathbb{R}^3$con il prodotto scalare euclideo) provare le 4 proprietà del prodotto scalare

Posti $v = (x_1, ..., x_n)$ e $w = (y_1, ..., y_n)$ si ha:

1) $v \cdot w = w \cdot v = (x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = y_1 x_1 + ... + y_n x_n = (y_1, ..., y_n) \cdot (x_1, ..., x_n)$

2) $(a_1 w_1 + a_2 w_2) \cdot (x_1, ..., x_n) = a_1 w_1 x_1 + ... + a_1 w_1 x_n + a_2 w_2 x_1 + ... + a_2 w_2 x_n = a_1(w_1 x_1 + ... + w_1 x_n) + a_2(w_2 x_1 + ... + w_2 x_n) = a_1(w_1 \cdot (x_1, ..., x_n)) + a_2(w_2 \cdot (x_1, ..., x_n))$

ossia anche:

$= (a_1 w_1 + a_2 w_2) \cdot v = a_1(w_1 v) + a_2(w_2 v)$

3) e 4) $v \cdot v = (x_1, ..., x_n) \cdot (x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

V) In E^3 (cioè $\mathbb{R}^3$con il prodotto scalare euclideo) provare le 3 proprietà caratterizzanti la norma

Posto $v = (x_1, ..., x_n)$ le proprietà sono:

1) e 2) $\|v\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{(x_1^2 + ... + x_n^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0$

3) $\|a \cdot v\| = \|a \cdot (x_1, ..., x_n)\| = \|ax_1 + ... + ax_n\| = |a| \, \|(x_1, ..., x_n)\| = |a| \, \|v\|$

Z) Siano $\phi \in End(V)$, B base ortonormale di V e $A = M_{\phi}^{BB}$. Allora ϕ è autoaggiunto se e solo se A è simmetrica.

Sia A una matrice simmetrica. Si vuole provare che $\phi(v) \cdot w = v \cdot \phi(w) \; \forall v, w \in V$. Denotando con X e Yle colonne delle componenti rispetto a B di v e w rispettivamente, si ha:

$\phi(x) \cdot Y =^t (AX)Y = (^tA^tX) \cdot Y =^t X \cdot (^tAY) =^t X \cdot (AY) = X \cdot \phi(Y)$

e poichè A simmetrica allora $A =^t A$. Viceversa sia ϕ autoaggiunto; se $B = (e_1, ..., e_n)$ e:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

allora :

$\phi(e_1) = a_{11}e_1 + ... + a_{n1}e_n$

.
.
.

$\phi(e_n) = a_{1n}e_1 + ... + a_{nn}e_n$

Poichè ϕ è autoaggiunto $\forall \, i, j$ si ha:

$\phi(e_i) \cdot e_j = e_i \cdot \phi(e_j)$

da cui:

$a_{ji} = (a_{1i}e_1 + ... + a_{ni}e_n) \cdot e_j = e_i \cdot (a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n) = a_{ij}$

NOTE AGGIUNTIVE

Gruppo abeliano

Sia G un insieme e $*$ una sua operazione binaria; G si dice gruppo commutativo o abeliano se valgono le seguenti proprietà:

1) $*$ è associativa

2) esiste in G un elemento neutro e rispetto a $*$

3) ogni elemento di G ammette inverso (opposto)

4) vale la proprietà commutativa: $a * b = b * a \; \forall \, a, b \in G$

inoltre, se valgono solo le prime 3 proprietà allora $(G, \, *, \, e)$ si dice gruppo.

Anello commutativo

Un insieme $(A, +, 0, \cdot, 1)$ si dice anello commutativo se:

1) $(A, +, 0)$ è un gruppo commutativo

2) il prodotto è associativo

3) 1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto

4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \; \forall \, a, b, c \in A$

5) il prodotto è commutativo

inoltre, se valgono solo le prime 4 proprietà A si dice anello.

Campo

L'anello commutativo K si dice campo se ogni suo elemento non nullo ammette inverso moltiplicativo.

Endomorfismo

Sia V un K-spazio vettoriale; un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ si dice endomorfismo di V . Lo spazio vettoriale degli endomorfismi di V, $L(V, V)$si indica con $End(V)$.

Vettori linearmente indipendenti

Dato un insieme $I = \{v_1, ..., v_n\}$ di vettori di un K-spazio vettoriale V, tali vettori si dicono linearmente indipendenti su K se il vettore nullo si ottiene come loro combinazione lineare soltanto con coefficienti nulli cioè

$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0_K$

In tal caso l'insieme I si dice libero.