

# TEORARIO DI FISICA TECNICA

A cura di Tobia Piccoli

## Indice

Equazione di conservazione della massa

Lavoro tecnico per una trasformazione isoterma di un gas ideale

Andamento di temperatura in una parete cilindrica con temperatura delle pareti uniforme

Formula dell'umidità specifica di una miscela di aria umida in funzione dell'umidità relativa

Dimostrare che l'andamento della temperatura in una parete piana di spessore  $L$  e superficie infinita, in condizioni stazionarie, è una funzione lineare

Ricavare l'equazione dell'umidificazione adiabatica e dimostrare che la trasformazione è approssimabilmente una isoentalpica

Formula della temperatura in funzione del tempo per il raffreddamento di un corpo omogeneo immerso in un fluido a temperatura costante, ipotizzando i parametri concentrati

Lavoro tecnico per un compressione isoentropica di un gas ideale

Formula scambio termico radiativo tra due superfici nere

Relazione tra coefficiente di effetto utile di una pompa di calore e quello di una macchina frigorifera, supponendo che operino tra le stesse temperature

Ricavare l'equazione di Fourier in coordinate cartesiane per il caso stazionario

Lavoro di volume di un gas ideale per una trasformazione isoterma

Ricavare la formula del rendimento ideale di un ciclo Brayton-Joule in funzione del rapporto di compressione

Ricavare il calore specifico di una politropica

Ricavare l'espressione del bilancio termico radiativo di una superficie diffusa

Ricavare l'espressione del primo principio per sistemi aperti

Ricavare l'entalpia dell'aria umida

Ricavare il rendimento di un ciclo Otto in funzione del rapporto di compressione volumetrico

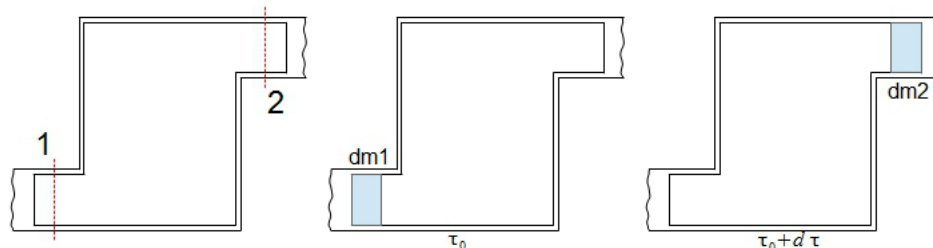
Ricavare l'espressione dell'equazione di Clapeyron

Funzionamento di uno psicrometro di Assman

Ricavare l'espressione della temperatura media logaritmica

## Equazione di conservazione della massa

Si consideri un sistema aperto come in figura:



Si suppone che almeno nelle sezioni di ingresso ed uscita vi sia equilibrio termodinamico. In un certo intervallo  $d\tau$  entrerà nel sistema una massa  $dm_1$  e vi uscirà una massa  $dm_2$ . Si considera in  $\tau_0$ , il sistema costituito dal sistema aperto più un volumetto del sistema che contenga la massa  $dm_1$ . Si può immaginare che questa massa defluisca in un tempo  $d\tau$ . Così all'istante  $\tau_0 + d\tau$  il sistema sarà quello della terza figura, ossia un sistema aperto più un volume finito contenente la massa  $dm_2$  (uscita anch'essa nel tempo  $d\tau$ ). Nel primo caso (cioè per il sistema della seconda figura), posta  $M_s$  la massa del sistema chiuso:

$$M_s|_{\tau_0} = dm_1 + \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0}$$

mentre nel caso successivo (terza figura) la massa sarà data da

$$M_s|_{\tau_0+d\tau} = dm_2 + \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0+d\tau}$$

Valendo per i sistemi chiusi il postulato di conservazione della massa, si possono eguagliare le due espressioni:

$$dm_1 - dm_2 = \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0+d\tau} - \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0}$$

E' possibile scomporre in serie di Taylor (solo i primi due termini) il volume aperto all'istante  $\tau_0 + d\tau$  :

$$\left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0+d\tau} = \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0} + \frac{\delta}{\delta\tau} \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0} d\tau$$

e sostituire nell'espressione precedente, ottenendo:

$$dm_1 - dm_2 = \frac{\delta}{\delta\tau} \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0} d\tau$$

e riarrangiando:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \frac{\delta}{\delta\tau} \left(\int_V \rho dV\right)_{\tau_0}$$

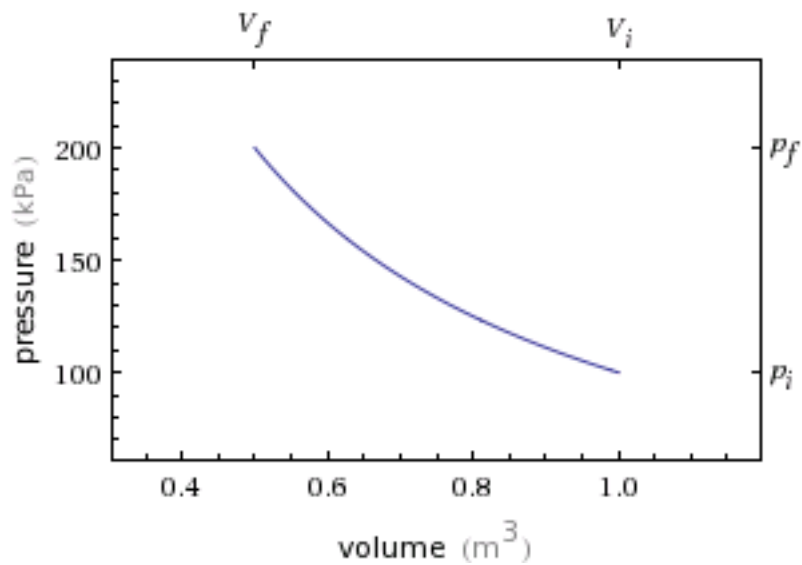
Nel caso si abbiano più sezioni di ingresso ed uscita si generalizza:

$$\sum_i \dot{m}_i = \frac{\delta}{\delta\tau} \left(\int_V \rho dV\right)$$

ed in condizioni di flusso stazionario:

$$\sum_i \dot{m}_i = 0$$

Lavoro tecnico per una trasformazione isoterma di un gas ideale



Dati due stati della trasformazione:

$$l_t = - \int_1^2 v dp = -RT \int_1^2 \frac{dp}{p} = RT \ln \frac{p_1}{p_2} = RT \ln \frac{v_1}{v_2}$$

### Andamento di temperatura in una parete cilindrica con temperatura delle pareti uniforme

Sia un cilindro cavo di lunghezza  $L$ , raggio esterno  $r_2$ , raggio interno  $r_1$ , temperatura della superficie interna  $T_{s1}$  e temperatura della superficie esterna  $T_{s2}$ , queste ultime supposte uguali in tutti i punti delle relative superfici. L'equazione di Fourier in coordinate cilindriche, per questo caso, si scrive come:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( dr \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

che integrata diventa:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{kr}$$

re-integrando:

$$T(r) = \frac{C_1}{k} \ln r + C_2$$

Con le ipotesi iniziali si ha:

$$\begin{cases} T(r_1) = \frac{C_1}{k} \ln r_1 + C_2 \\ T(r_2) = \frac{C_1}{k} \ln r_2 + C_2 \end{cases}$$

Che risolta permette di trovare le costanti:

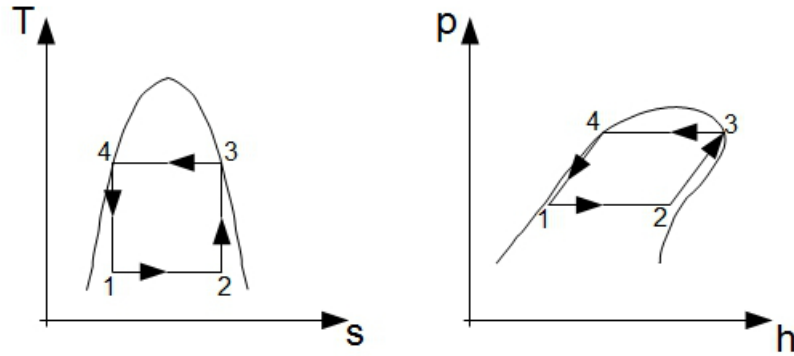
$$C_1 = k \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$$C_2 = T_{s2} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_2$$

che sostituite nella soluzione dell'equazione differenziale iniziale, permettono di ottenere l'andamento della temperatura lungo la parete:

$$T(r) = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2} + T_{s2}$$

**Piani T - s e p - h ciclo inverso a vapore e formula del coefficiente di effetto utile**



Si definisce il calore assorbito, detto effetto frigorifero, come:

$$q_o = h_2 - h_1$$

il lavoro tecnico, necessario per la compressione isoentropica del fluido dalla pressione  $p_0$  alla pressione  $p_1$ , è:

$$|l_{23}| = h_3 - h_2$$

ed il coefficiente di effetto utile per il ciclo sarà:

$$\varepsilon_{fr} = \frac{q_o}{|l_{23}|} = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_2}$$

**Formula dell'umidità specifica di una miscela di aria umida in funzione dell'umidità relativa**

Date:

$x = \frac{m_v}{m_a}$  ; umidità specifica,  $m_v$  massa vapor d'acqua e  $m_a$  massa aria secca nel volume di aria umida

$\varphi = \frac{m_v}{m_s}$  ; umidità relativa,  $m_s$  massa di vapore che nelle stesse condizioni (T,V) sarebbe presente in saturazione

quindi:

$$x = \frac{m_v}{m_a} = \frac{\rho_v}{\rho_a} = \frac{p_v V}{R_v T} \frac{R_a T}{p_a V} = \frac{R_a}{R_v} \frac{p_v}{p_a} = 0.622 \frac{p_v}{p - p_v}$$

si riscrive l'umidità relativa come:

$$\varphi = \frac{m_v}{m_s} = \frac{p_v V}{R_v T} \frac{R_v T}{p_s V} = \frac{p_v}{p_s} ; p_s \text{ pressione di saturazione}$$

da cui:

$$p_v = \varphi p_s$$

che sostituita nell'espressione dell'umidità specifica permette di ottenere:

$$x = 0.622 \frac{\varphi p_s}{p - \varphi p_s}$$

**Dimostrare che l'andamento della temperatura in una parete piana di spessore  $L$  e superficie infinita, in condizioni stazionarie, è una funzione lineare**

Partendo dall'equazione di Fourier, posta nulla la generazione di calore e supposte note le temperature a parete  $T_{s1}$  e  $T_{s2}$ :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

integrando:

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

ed integrando nuovamente:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Si impongono quindi le condizioni al contorno:

$$T = T_{s1}; \text{ per } x = 0$$

$$T = T_{s2}; \text{ per } x = L$$

che permettono di scrivere il sistema:

$$\begin{cases} T_{s1} = C_2 \\ T_{s2} = C_1 L + C_2 \end{cases}$$

che sostituite nell'equazione integrale restituiscono l'andamento della temperatura:

$$T(x) = (T_{s2} - T_{s1}) \frac{x}{L} + T_{s1}$$

funzione di  $x$  e chiaramente lineare



**Ricavare l'equazione dell'umidificazione adiabatica e dimostrare che la trasformazione è approssimabilmente una isoentalpica**

Si parte scrivendo il sistema delle equazioni di bilancio; i termini con pedice 2 sono riferiti alla sezione di uscita, mentre quelli con pedice 1 sono riferiti a quella di ingresso:

$$\begin{cases} \dot{m}_{a2}h_2 - \dot{m}_{a1}h_1 - \dot{m}_l h_l = \dot{Q} & \text{Equazione dell'energia} \\ \dot{m}_{a2} - \dot{m}_{a1} = 0 & \text{Conservazione della massa di aria secca} \\ \dot{m}_{a2}x_2 - \dot{m}_{a1}x_1 - \dot{m}_l = 0 & \text{Conservazione della massa d'acqua} \end{cases}$$

essendo la trasformazione adiabatica si ha  $\dot{Q} = 0$  perchè è il calore scambiato con l'ambiente. Inoltre dall'equazione di conservazione della massa di aria secca:

$$\dot{m}_{a2} = \dot{m}_{a1} \Rightarrow \dot{m}_{a2} = \dot{m}_{a1} = \dot{m}_a$$

e quindi il sistema si può riscrivere ridurre a:

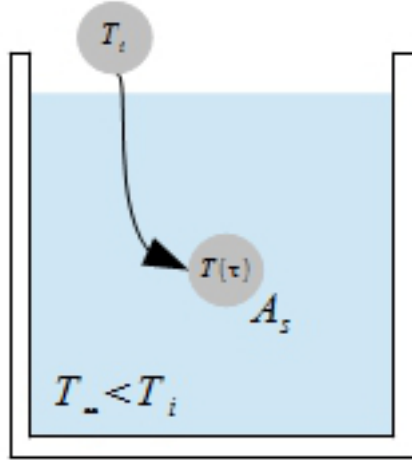
$$\begin{cases} \dot{m}_a (h_2 - h_1) = \dot{m}_l h_l \\ \dot{m}_a (x_2 - x_1) = \dot{m}_l \end{cases}$$

ossia:

$$h_l = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1}$$

Essendo le entalpie dell'aria e dell'acqua dello stesso ordine di grandezza, mentre  $x_2 - x_1$  è molto più piccolo (almeno 3 ordini di grandezza), si può trascurare  $h_l$ , dimostrando che la trasformazione è pressochè isoentalpica

**Formula della temperatura in funzione del tempo per il raffreddamento di un corpo omogeneo immerso in un fluido a temperatura costante, ipotizzando i parametri concentrati**



Si suppone che la temperatura del corpo sia uniforme e la capacità termica del fluido di raffreddamento sia elevata (così da poter considerare  $T_\infty$  costante). Applicando il primo principio della termodinamica:

$$-\dot{E}_{out} = \dot{E}_{st}$$

dove  $\dot{E}_{out}$  è la potenza termica uscente dal sistema (quindi negativa) e  $\dot{E}_{st}$  la variazione di energia del sistema. Essendo la potenza uscente dovuta a convezione, si può scrivere:

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{d\tau}$$

si applica un cambio di variabile:

$$\theta = T - T_\infty \Rightarrow \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{dT}{d\tau}$$

e si può riscrivere il bilancio come:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{hA_s}{\rho V c}$$

che si risolve per separazione di variabili e si integra:

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA_s}{\rho V c} \int_0^\tau d\tau$$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_i} = -\frac{hA_s}{\rho V c} \tau$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\left[\frac{hA_s}{\rho V c}\right] \tau}$$

e quindi l'andamento della temperatura nel tempo è:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\left[\frac{hA_s}{\rho V c}\right] \tau}$$

### Lavoro tecnico per un compressione isoentropica di un gas ideale

Dalla definizione di lavoro tecnico:

$$l_t = - \int_1^2 v dp = p_1^{\frac{1}{k}} v_1 \int_1^2 p^{-\frac{1}{k}} dp$$

$$\frac{k}{k-1} p_1^{\frac{1}{k}} v_1 \left( p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}} \right) = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{k}{k-1} RT_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

### Formula scambio termico radiativo tra due superfici nere

Date due superfici nere di area  $A_i$  e  $A_j$ , temperatura  $T_i$  e  $T_j$  e potere emissivo  $E_i$  e  $E_j$ , la potenza termica che lascia la superficie i ed incide sulla superficie j è:

$$q_{i \rightarrow j} = E_{bi} A_i F_{ij}$$

mentre la potenza che lascia la superficie j ed incide sulla superficie i vale:

$$q_{j \rightarrow i} = E_{bj} A_j F_{ji}$$

quindi la potenza netta scambiata sarà semplicemente:

$$q_{ij} = q_{i \rightarrow j} - q_{j \rightarrow i}$$

e sostituendo le espressioni precedenti:

$$q_{ij} = E_{bi} A_i F_{ij} - E_{bj} A_j F_{ji}$$

per la reciprocità si ha  $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$  da cui si ottiene la formula:

$$q_{ij} = A_i F_{ij} (E_{bi} - E_{bj}) = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

**Relazione tra coefficiente di effetto utile di una pompa di calore e quello di una macchina frigorifera, supponendo che operino tra le stesse temperature**

Le definizioni sono:

$$\varepsilon_{fr} = \frac{Q_0}{|L_n|} ; \text{coefficiente di effetto utile frigorifero}$$

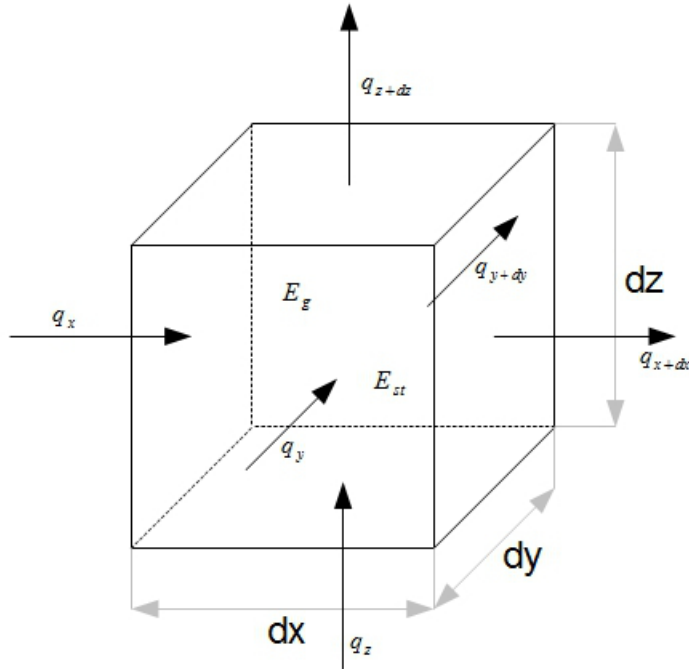
$$\varepsilon_{p.c.} = \frac{Q_1}{|L_n|} ; \text{coefficiente di effetto utile della pompa di calore}$$

con  $Q_0$  calore sottratto nel ciclo alla sorgente fredda,  $Q_1$  calore ceduto nel ciclo alla sorgente calda e  $|L_n|$  lavoro netto speso per il funzionamento del frigorifero. Per ricavare la relazione basta mettere a confronto i due coefficienti:

$$\varepsilon_{p.c.} = \frac{Q_1}{|L_n|} = \frac{Q_0 + |L_n|}{|L_n|} = \varepsilon_{fr} + 1$$

**Ricavare l'equazione di Fourier in coordinate cartesiane per il caso stazionario**

L'equazione permette di ricavare il campo di temperatura di un sistema. Si fanno le ipotesi di isotropia e indeformabilità del sistema e si considera un volume di controllo infinitesimo interno al sistema.



attraverso le facce del volume di controllo si potranno avere scambi di calore, ma avendo considerato indeformabile il sistema, il lavoro sarà nullo. Il bilancio delle potenze è:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

dove:

$\dot{E}_{in}$  potenza termica entrante per conduzione (quindi positiva)

$\dot{E}_{out}$  potenza termica uscente per conduzione (negativa)

$\dot{E}_g$  potenza termica generata all'interno del sistema, uniforme nel volume

$\dot{E}_{st}$  variazione nel tempo dell'energia del sistema

Con riferimento alla schematizzazione iniziale si avrà:

$$\dot{E}_{in} = q_x + q_y + q_z$$

$$\dot{E}_{out} = -(q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})$$

$$\dot{E}_g = \dot{q}_g dV = \dot{q}_g dx dy dz$$

$$\dot{E}_{st} = \rho dV c_v \frac{\delta T}{\delta \tau} = \rho c_v \frac{\delta T}{\delta \tau} dx dy dz$$

e quindi il bilancio diventa:

$$q_x + q_y + q_z - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + \dot{q}_g dx dy dz = \rho c_v \frac{\delta T}{\delta \tau} dx dy dz$$

si esprimono quindi le potenze uscenti dal volumedi controllo in funzione di quelle entranti, mediante una serie di Taylor troncata al secondo termine:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\delta q_x}{\delta x} dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\delta q_y}{\delta y} dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\delta q_z}{\delta z} dz$$

sostituendo nell'espressione precedente e semplificando, il bilancio diventa:

$$-\frac{\delta q_x}{\delta x} dx - \frac{\delta q_y}{\delta y} dy - \frac{\delta q_z}{\delta z} dz + \dot{q}_g dx dy dz = \rho c_v \frac{\delta T}{\delta \tau} dx dy dz$$

per la legge di Fourier si può scrivere:

$$q_x = -k dy dz \frac{\delta T}{\delta x}$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\delta T}{\delta y}$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\delta T}{\delta z}$$

sostituendo nel bilancio e rielaborando si ottiene l'equazione di Fourier nel caso stazionario:

$$\frac{\delta}{\delta x} \left( k \frac{\delta T}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( k \frac{\delta T}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left( k \frac{\delta T}{\delta z} \right) + \dot{q}_g = \rho c_v \frac{\delta T}{\delta \tau}$$

in forma vettoriale:

$$\nabla \bullet (k \nabla T) + \dot{q}_g = \rho c_v \frac{\delta T}{\delta \tau}$$

Nell'ipotesi di stazionarietà diventa:

$$\frac{\delta}{\delta x} \left( k \frac{\delta T}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( k \frac{\delta T}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left( k \frac{\delta T}{\delta z} \right) + \dot{q}_g = 0$$

$$\nabla \bullet (k \nabla T) + \dot{q}_g = 0$$

e senza generazione di calore:

$$\frac{\delta}{\delta x} \left( k \frac{\delta T}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( k \frac{\delta T}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left( k \frac{\delta T}{\delta z} \right) = 0$$

e se k è costante:

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} = 0$$

in termini vettoriali:

$$\nabla \bullet (k \nabla T) = 0$$

$$\nabla^2 T = 0$$

che è l'equazione di Fourier in coordinate cartesiane

### Lavoro di volume di un gas ideale per una trasformazione isoterma

Dalla definizione di lavoro di volume:

$$l = \int_1^2 p dv \stackrel{\text{equazione dei gas perfetti}}{=} \int \frac{RT dv}{v} = RT \int_1^2 \frac{dv}{v} = RT \ln \frac{v_2}{v_1} = RT \ln \frac{p_2/RT}{p_1/RT}$$



**Ricavare la formula del rendimento ideale di un ciclo Brayton-Joule in funzione del rapporto di compressione**

$$\eta = \frac{l_T^+}{q_{23}^+} = \frac{l_T - |l_c|}{q_{23}^+} = 1 + \frac{q_{41}^-}{q_{23}^+} = 1 - \frac{|q_{41}^-|}{q_{23}^+}$$

con  $l_T$  lavoro specifico ottenuto dalla turbina,  $l_c$  lavoro assorbito dal compressore,  $q_{23}$  calore assorbito dal primo scambiatore (o camera di combustione per le turbine a gas) e  $q_{41}$  il calore ceduto all'ambiente dal secondo scambiatore (non presente nelle turbine a gas a ciclo aperto). Visto che

$$q_{23}^+ = h_3 - h_2 = c_p (T_3 - T_2)$$

$$q_{41}^- = h_1 - h_4 = c_p (T_1 - T_4)$$

sostituendo nella precedente espressione:

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}$$

per le trasformazioni isoentropiche di compressione ed espansione, posto il rapporto di compressione  $r_p = \frac{p_2}{p_1}$  si ha:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = r_p^{\frac{k-1}{k}}$$

“girando” i primi due membri dell'uguaglianza appena vista:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

che sostituendo nell'espressione del rendimento trovata:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{\frac{T_3}{T_2} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}}$$

### Ricavare il calore specifico di una politropica

Per le trasformazioni politropiche vale la legge  $pv^n = cost$ , con  $n$  costante della politropica

Per una trasformazione quasi statica il calore scambiato vale:

$$q_{12} = c_v (T_2 - T_1) + \int_1^2 p dv$$

l'integrale vale:

$$\int_1^2 p dv = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n} = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-n}$$

ricordando che:

$$R = c_v (k - 1)$$

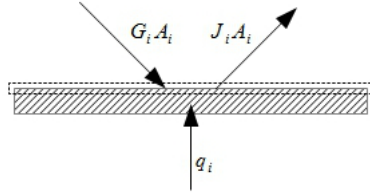
e sostituendo gli ultimi due risultati nella prima formula:

$$q = c_v \frac{k-n}{1-n} (T_2 - T_1)$$

da cui si ottiene il calore specifico della politropica (ricordando la definizione di calore specifico)

$$c_n = c_v \frac{k-n}{1-n}$$

**Ricavare l'espressione del bilancio termico radiativo di una superficie grigia diffusa**



Si considera la superficie nella figura sopra; il volume di controllo (indicato con la tratteggiatura fina) coincide con la superficie stessa. Per il primo principio si avrà che la poenza radiata netta che lascia la superficie sarà:

$$q_i = A_i (J_i - G_i)$$

dalla definizione della radiosità:

$$J_i = E_i + \rho_i G_i \Rightarrow G_i = \frac{J_i - E_i}{\rho_i} = \frac{J_i - E_i}{1 - \alpha_i}$$

per l'ipotesi di superficie grigia e diffusa vale la legge di Kirchoff, quindi:

$$\alpha_i = \varepsilon_i$$

$$E_i = \varepsilon_i E_{b,i}$$

sostituendo nell'espressione dell'irradianza:

$$G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i}$$

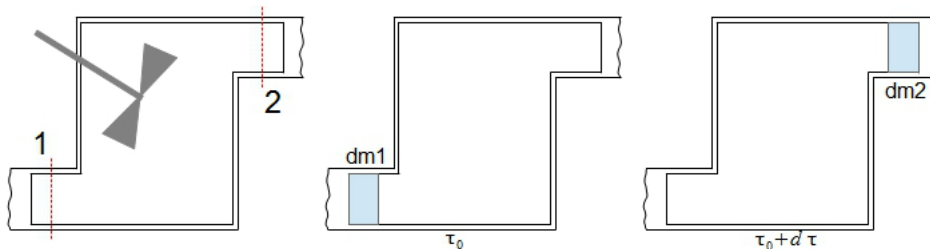
che combinata con l'equazione iniziale:

$$q_i = A_i \left( J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i} \right) = \frac{A_i \varepsilon_i (E_{b,i} - J_i)}{1 - \varepsilon_i} = \frac{E_{b,i} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}}$$

il termine  $\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}$  si dice resistenza superficiale alla radiazione

## Ricavare l'espressione del primo principio per sistemi aperti

Si considera il sistema aperto della prima figura (nelle restanti due sono rappresentati i sistemi ausiliari di cui ci si serve per la dimostrazione):



si fissano le sezioni 1 e 2 in modo che almeno in queste vi sia equilibrio termodinamico. Quindi si va a considerare prima lo stato termodinamico del sistema in un istante  $\tau_0$  e poi in un istante  $\tau_0 + d\tau$ :

$$E_{\tau_0+d\tau} - E_{\tau_0} = Q - L_{tot}$$

dove:

$E_{\tau_0+d\tau}$  è l'energia del sistema chiuso ausiliario all'istante  $\tau_0 + d\tau$

$E_{\tau_0}$  è l'energia del sistema chiuso ausiliario all'istante  $\tau_0$

$Q$  è il calore scambiato dal sistema con l'ambiente in  $d\tau$

$L_{tot}$  è il lavoro totale scambiato dal sistema con l'ambiente in  $d\tau$

Per sviluppare i termini di questo bilancio, si definisce una generica energia associata al sistema aperto  $(E_{SA})_{\tau_0}$  cui non si pone alcuna limitazione. Posti poi  $e_c$  l'energia cinetica,  $e_p$  l'energia potenziale e  $u$  l'energia interna, si hanno:

$$E_{\tau_0} = (u_1 + e_{c1} + e_{p1}) dm_1 + (E_{SA})_{\tau_0}$$

$$E_{\tau_0+d\tau} = (u_2 + e_{c2} + e_{p2}) dm_2 + (E_{SA})_{\tau_0+d\tau}$$

sviluppando quest'ultimo termine in serie di Taylor (fino al secondo termine, essendo gli altri infinitesimi di ordine superiore) si ha:

$$(E_{SA})_{\tau_0+d\tau} = (E_{SA})_{\tau_0} + \frac{\delta}{\delta\tau} (E_{SA})_{\tau_0} d\tau$$

sostituendo nell'espressione precedente:

$$E_{\tau_0+d\tau} = (u_2 + e_{c2} + e_{p2}) dm_2 + (E_{SA})_{\tau_0} + \frac{\delta}{\delta\tau} (E_{SA})_{\tau_0} d\tau$$

e quindi in quella iniziale:

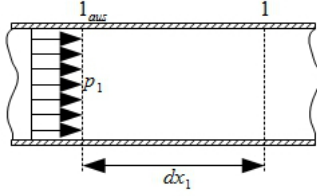
$$(u_2 + e_{c2} + e_{p2}) dm_2 + (E_{SA})_{\tau_0} + \frac{\delta}{\delta\tau} (E_{SA})_{\tau_0} d\tau - (u_1 + e_{c1} + e_{p1}) dm_1 - (E_{SA})_{\tau_0} = Q - L_{tot}$$

$$(u_2 + e_{c2} + e_{p2}) dm_2 - (u_1 + e_{c1} + e_{p1}) dm_1 + \frac{\delta}{\delta\tau} (E_{SA})_{\tau_0} d\tau = Q - L_{tot}$$

per quanto riguarda il lavoro:

$$L_{tot} = L_t + L_{em} - |L_{imm}|$$

dove  $L_t$  è il lavoro tecnico,  $L_{em}$  è il lavoro fatto dal sistema per espellere il fluido e  $L_{imm}$  è il lavoro fatto sul sistema per immettere il fluido. Per calcolare i lavori di immissione ed emissione si consideri la figura seguente:



supponendo che le pressioni delle sezioni 1 e  $1_{aus}$  siano uguali e che le sezioni distino ad un  $dx_1$  tale che  $dm_1 = \rho S dx_1$ :

$$|L_{imm}| = p_1 S_1 dx_1 = p_1 v_1 dm_1$$

$$|L_{em}| = p_2 S_2 dx_2 = p_2 v_2 dm_2$$

che sostituite nel bilancio:

$$(u_2 + e_{c2} + e_{p2}) dm_2 - (u_1 + e_{c1} + e_{p1}) dm_1 + \frac{\delta}{\delta\tau} (E_{SA})_{\tau_0} d\tau = Q - L_t - p_2 v_2 dm_2 + p_1 v_1 dm_1$$

$$(u_2 + e_{c2} + e_{p2} + p_2 v_2) dm_2 - (u_1 + e_{c1} + e_{p1} - p_1 v_1) dm_1 + \frac{\delta}{\delta\tau} (E_{SA})_{\tau_0} d\tau = Q - L_t$$

ricordando che la definizione di entalpia è  $h = u + pv$ , e dividendo per  $d\tau$ :

$$(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) \dot{m}_2 - (h_1 + e_{c1} + e_{p1}) \dot{m}_1 + \frac{\delta}{\delta\tau} (E_{SA})_{\tau_0} = \dot{Q} - \dot{L}_t$$

### Ricavare l'entalpia dell'aria umida

Come noto l'aria umida è una miscela di vari gas e vapor d'acqua. L'entalpia totale di questa miscela è:

$$H = m_a h_a + m_v h_v$$

dove i pedici  $a$  indicano l'aria secca ed i pedici  $v$  il vapor d'acqua. dividendo per la massa di aria secca:

$$h = h_a + x h_v \left[ \frac{J}{kg} \right]$$

Fissando l'entalpia nulla a  $273.15K$  si può valutare l'entalpia specifica dell'aria secca come:

$h_a = c_{pa} t = 1.006t$  ;  $c_{pa}$  calore specifico a pressione costante secca dell'aria ,  
valore medio

per il vapore invece:

$$h_v = r_0 + c_{pv} t = 2501 + 1.875t ; r_0 \text{ calore latente di evaporazione a } 0^\circ C$$

Quindi l'entalpia dell'aria umida vale:

$$h = 1.006t + (2501 + 1.875t) x \left[ \frac{kJ}{kg} \right]$$

**Ricavare il rendimento di un ciclo Otto in funzione del rapporto di compressione volumetrico**

Si definiscono i punti chiave del ciclo Otto:

0 fine espulsione - inizio aspirazione

1 fine aspirazione - inizio compressione

2 fine compressione - inizio combustione

3 fine combustione - inizio espansione

4 fine espansione - inizio scarico

5 fine scarico - inizio espulsione

Il rendimento vale:

$$\eta = \frac{l_n}{q_{23}^+} = \frac{q_{23}^+ + q_{41}^-}{q_{23}^+} = 1 + \frac{q_{41}^-}{q_{23}^+} = 1 - \frac{|q_{41}^-|}{q_{23}^+}$$

sotto le ipotesi di aria standard:

$$q_{23}^+ = u_3 - u_2 = c_v (T_3 - T_2)$$

$$q_{41}^- = u_4 - u_1 = c_v (T_1 - T_4)$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}$$

si definiscono quindi:

$$r_T = \frac{T_2}{T_1}; \text{ rapporto tra le temperature}$$

$$r_v = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}; \text{ rapporto volumetrico di compressione}$$

Applicando le trasformazioni dei gas perfetti alle due isoentropiche (1 - 2 e 3 - 4) si ha:

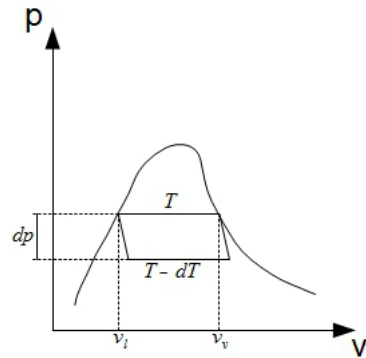
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1} = r_v^{k-1} = r_T = \left(\frac{v_4}{v_3}\right)^{k-1} = \frac{T_3}{T_4} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_4}{T_3}$$

Quindi l'espressione del rendimento si semplifica in:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}}$$

### Ricavare l'espressione dell'equazione di Clapeyron

E' una relazione che lega il calore latente alle altre grandezze termodinamiche. Si considera un cambiamento di fase da liquido a vapore ed un ciclo di Carnot infinitesimo che operi tra le temperature  $T$  e  $T - dT$



si parte dal rendimento di un ciclo di carnot, che vale in questo caso:

$$\eta_c = \frac{dL}{Q_1} = \frac{dT}{T_1}$$

il lavoro di un ciclo nel piao p-v corrisponde all'area racchiusa dalla curva rappresentante il ciclo, quindi:

$$dL \simeq dp (v_v - v_l)$$

sostituendo nella precedente, e ricordando che nel ciclo considerato il calore assorbito corrisponde a quello latente di evaporazione:

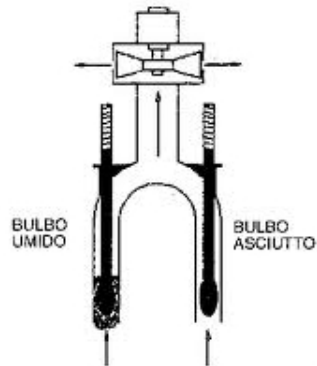
$$\frac{dp(v_v - v_l)}{r} = \frac{dT}{T}$$

ed esplicitando  $r$  si ricava l'equazione di Clapeyron

$$r = \frac{dp}{dT} T (v_v - v_l)$$



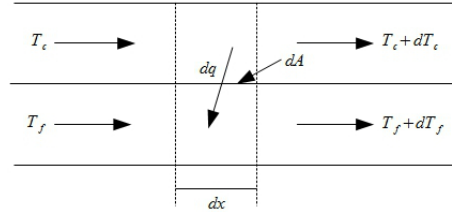
## Funzionamento di uno psicrometro di Assman



È uno strumento che permette di misurare l'umidità relativa di una portata d'aria. Costituito da due canali in cui scorre l'aria da misurare, che è mossa da un ventilatore posto in cima allo strumento (sulla bocca di uscita). In ognuno dei canali è inserito un termometro, uno dei quali ha il bulbo sensore ricoperto da una garza bagnata. Si suppone che il termometro con la garza sia investito da una massa d'aria con una certa umidità relativa. Inizialmente, se la garza possiede la stessa temperatura dell'aria, non vi è scambio termico. Appena l'acqua della garza inizia ad evaporare l'insieme termometro - garza si raffredda, portandosi ad una temperatura inferiore a quella dell'aria, quindi l'aria comincerà a cedere calore alla garza per convezione. Il processo continuerà fino all'equilibrio, quando il calore ceduto per evaporazione sarà uguale a quello acquisito per convezione. La temperatura di equilibrio è detta di bulbo umido. Nota anche la temperatura di bulbo secco (indicata dall'altro termometro) è possibile trovare sul diagramma psicrometrico il punto che individua la condizione di equilibrio del termometro bagnato,  $t = t_{bb}$  e  $\varphi = 100\%$ , perché per la miscela acqua aria la trasformazione è praticamente isoentalpica. Per questo punto si fa quindi passare l'isoentalpica relativa: l'intersezione dell'isoterma di bulbo secco con l'isoentalpica, rappresenta la condizione termodinamica della massa di aria umida che è stata misurata.

### Ricavare l'espressione della temperatura media logaritmica

Si consideri una sezione infinitesima di uno scambiatore di calore:



e si formulano le ipotesi di:

Adiabaticità dello scambiatore verso l'esterno

Conduzione assiale trascurabile lungo la parete del tubo

Variazioni trascurabili dell'energia cinetica e potenziale

Calori specifici costanti

Trasmittanza costante

Si applica il primo principio ai tre volumi di controllo (tubo caldo, tubo freddo e scambiatore completo):

$$dq = -\dot{m}_c c_{p,c} dT_c = -C_c T_c$$

$$dq = \dot{m}_f c_{p,f} dT_f = C_f T_f$$

$$dq = U \Delta T dA$$

tenendo presente che  $\Delta T = T_c - T_f$  e differenziando:

$$d(\Delta T) = dT_c - dT_f$$

sostituendo le due espressioni iniziali:

$$d(\Delta T) = -dq \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

che sostituita nell'equazione dello scambiatore di calore, e integrando dall'ingresso all'uscita della sezione considerata:

$$\int_1^2 \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -U \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \int_1^2 dA$$

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \left( \frac{T_{c,i} - T_{c,u}}{q} + \frac{T_{f,u} - T_{f,i}}{q} \right)$$

$$q = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)} = UA \Delta T_{ml}$$

e si definisce quindi temperatura media logaritmica il termine:

$$\Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)}$$